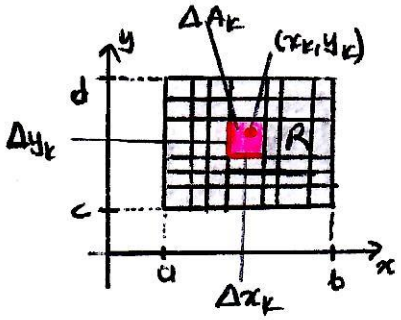
15 KATLI İNTEGRALLER

15.1 Dikdörtgen Bölgede İki Katlı İntegraller

xy- düzleminde sınırlı bir bölgede sürekli f(x,y) fonksiyonunun integrali, tek değişkenli fonksiyonların integralleriyle birçok benzerlik taşır. Her iki katlı integral, her aşamasında, tek değişkenli integrasyon yöntemleri kullanarak hesaplanabilir.

Dikdörtgensel Bölgelerde İki Katlı İntegraller

f(x,y) fonksiyonu R: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ ile verilen bir R dikdörtgensel bölgesinde tanımlı olsun. R bölgesinin x- ve y- eksenlerine paralel doğrular ile bir ağ gibi kaplandığını düşünelim. Bu doğrular, R'yi, alanı $\Delta A = \Delta x \Delta y$ olan küçük parçalara bölar. Bu parçaları $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ olarak sıralar ve her



ΔA_k parçasından bir (x_k, y_k) noktasını seçersek, tek değişkenli Riemann toplamında olduğu gibi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

toplam formunu oluşturabiliriz.

Eğer R bölgesinde f sürekli ise $\Delta x, \Delta y$'yi sıfıra götürdüğümüzde (n'yi ∞'a götürmekle aynı) S_n toplamı bir limite yaklaşıyorsa R üzerinde f'nin <u>iki katlı integrali</u> denir. Bu

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{veya} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

notasyonu ile gösterilir.

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

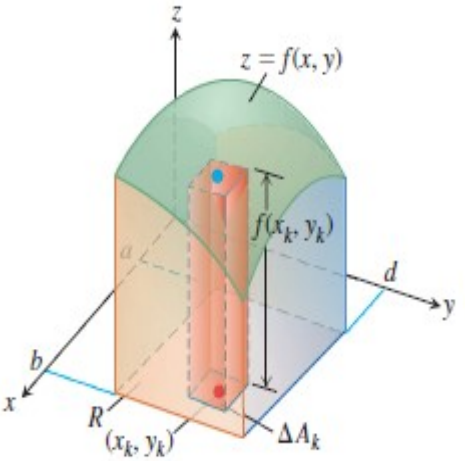
İki Katlı İntegrallerin Özellikleri

1) $\iint_R k f(x,y)\, dA = k \iint_R f(x,y)\, dA$ (k sabit) 2) $\iint_R (f(x,y) \pm g(x,y))\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g\, dA$

3) R'de $f(x,y) > 0$ ise $\iint_R f(x,y)\, dA > 0$, R'de $f(x,y) > g(x,y)$ ise $\iint_R f\, dA > \iint_R g\, dA$

4) $R = R_1 \cup R_2$ ve $(R_1 \cap R_2 = \emptyset)$ $\boxed{R_1}\boxed{R_2}$ $\iint_R f\, dA = \iint_{R_1} f\, dA + \iint_{R_2} dA$.

Hacimler



xy-düzleminde R dikdörtgen bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonu pozitif ise $z=f(x,y)$ yüzeyi ile üstten R ile alttan sınırlı üç boyutlu katı cismin hacmini, R üzerinde f'nin iki katlı integrali olarak yorumlayabiliriz. $S_n=\sum f(x_k,y_k)\Delta A_k$ toplamındaki her bir $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ terimi ΔA_k tabanlı dikey dikdörtgensel kutunun hacmidir. S_n toplamı katı cismin yaklaşık hacmidir. Hacim, $\Delta A_k \to 0$ $(n\to\infty)$ için

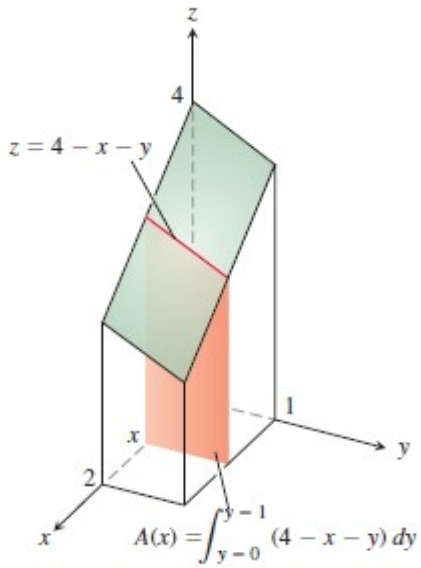
$$\text{Hacim} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)\,dA$$

dır.

İki Katlı İntegralleri Hesaplamak İçin Fubini Teoremi

xy-düzleminde $R: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde $z=4-x-y$ düzlemi altında kalan hacmi hesaplamak istiyelim. x-eksenine dik dilimleme ile dilimleme yöntemini kullanırsak hacim

$$\int_{x=0}^{2} A(x)\,dx$$



dir. $A(x)$, x noktasında kesit alanıdır. x'de $z=4-x-y$ eğrisi altında kalan kesit alan

$$A(x)=\int_{y=0}^{1}(4-x-y)\,dy$$

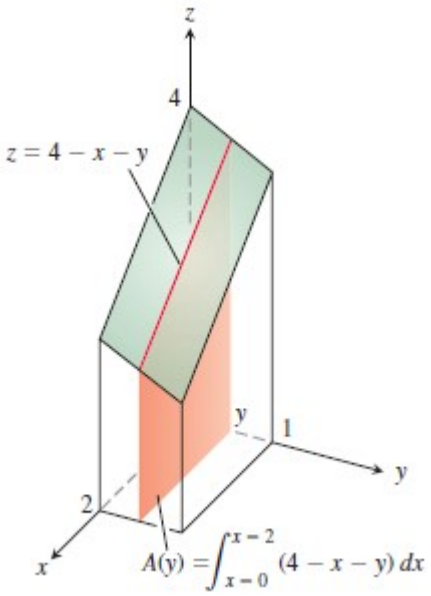
dir. $A(x)$'i hesaplamak için x sabit tutulur ve y'ye göre integral alınır. Bu denklemleri birleştirirsek katı cismin hacmini elde ederiz:

$$\text{Hacim}=\int_{x=0}^{2}A(x)\,dx=\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}(4-x-y)\,dy\right)dx=\int_0^2\left[4y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$=\int_0^2\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=5 \text{ br}^3.$$

$$\text{Hacim}=\int_0^2\int_0^1(4-x-y)\,dy\,dx$$

Sağdaki ifadeye, tekrarlı (iterated) integral denir. Bu işlemde önce x'i sabit tutup y=0'dan 1'e kadar y'ye göre integral alıyoruz. Daha sonra x=0'dan 2'ye



x'e göre integral alıyoruz.

Eğer y-eksenine dik düzlemler ile dilimleme yaparak hacimi hesaplamak isteseydik ne olacaktı. Bu durumda, y'deki kesit alanı

$$A(y)=\int_{x=0}^{2}(4-x-y)\,dx=\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{x=0}^{2}=6-2y.$$

Ve hacim

$$\text{Hacim}=\int_{y=0}^{1}A(y)\,dy=\int_{0}^{1}(6-2y)\,dy=\left(6y-y^2\right)\Big|_{0}^{1}=5\ b^3$$

önceki hesapla uyuşacaktı. Hacim hesaplamak için tekrarlı integrali

$$\text{Hacim}=\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(4-x-y)\,dx\,dy$$

şeklinde yazarız. Burada integrali önce x'e göre alıyoruz.

Teorem: Fubini Teoremi (Birinci Form) (1907 Guido Fubini)

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu, $R: a\le x\le b,\ c\le y\le d$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ise

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

dir.

Örnek: $f(x,y)=1-6x^2y$ ve $R: 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA$'yı hesaplayınız.

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_0^2(1-6x^2y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(x-2x^3y\right)\Big|_{x=0}^{2}dy=\int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy$$

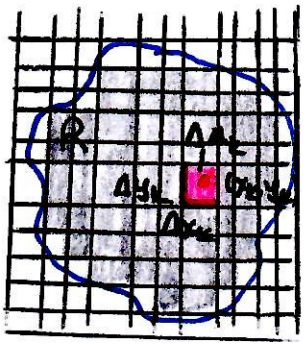
$$=\left(2y-8y^2\right)\Big|_{-1}^{1}=4.$$

Veya

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_0^2\int_{-1}^{1}(1-6x^2y)\,dy\,dx=\int_0^2\left(y-3x^2y^2\right)\Big|_{-1}^{1}dx=\int_0^2 2\,dx=4.$$

15.2 Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Sınırlı Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

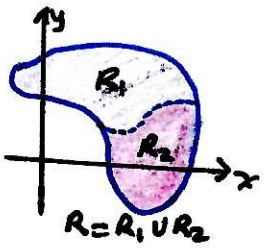


Bir sınırlı, dikdörtgensel olmayan R bölgesinde bir $f(x,y)$ fonksiyonunun iki katlı integralini tanımlamak için R bölgesini şekilde görüldüğü gibi dikdörtgensel küçük parçalara ayırıyoruz. Bu parçaları 1'den n'ye kadar sıralayıp, k. dikdörtgenin alanını ΔA_k ile gösterelim. Daha sonra k. dikdörtgenden bir (x_k,y_k)

noktası seçelim ve $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ Riemann toplamını oluşturalım. S_n'yi oluşturan parçalanışın normu, $\|P\| \to 0$ (Yani $\Delta A \to 0$ veya $n \to \infty$) ve $f(x,y)$ sürekli ise Riemann toplamı bir limit değerine yakınsayacaktır. (seçimlerden bağımsız olarak) Bu limit, R üzerinde $f(x,y)$'nin iki katlı integralidir ve aşağıdaki notasyonla gösterilir:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

R'nin sınırları doğal olarak artık aralık olmayacaktır. Dikdörtgensel olmayan bölgelerde integrallerin cebirsel özellikleri, dikdörtgensel bölgelerle aynıdır. Toplamsallık özelliği, şekildeki gibi birbirinin üzerine gelmeyen bölgelerin birleşimi gibi ise $R = R_1 \cup R_2$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

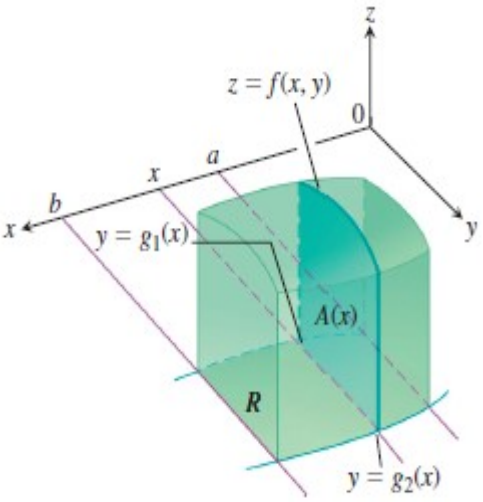
şeklindedir.

Eğer $f(x,y)$ pozitif ve R üzerinde sürekli ise $z = f(x,y)$ yüzeyi ve R bölgesi arasında kalan katı cismin hacmini, daha önce olduğu gibi

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

olarak tanımlarız.

Eğer R bölgesi, şekilde gösterildiği gibi üstten ve altan sırasıyla $y = g_2(x)$ ve $y = g_1(x)$ eğrileriyle sınırlı ve kenarlardan $x = a$ ve $x = b$ doğruluğuyla çevrili ise dilimleme yöntemi ile hacimi hesaplayabiliriz. kesit alanı



$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

ve $A(x)$'i $x=a$'dan $x=b$'ye ardışık (tekrarlı) integre edersek hacimi bulurz:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Benzer olarak, R, $x = h_2(y)$, $x = h_1(y)$ eğrileri ve $y = c$, $y = d$ doğruları arasındayso ardışık integralle hacim $V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$ dir. (Şekil derste)

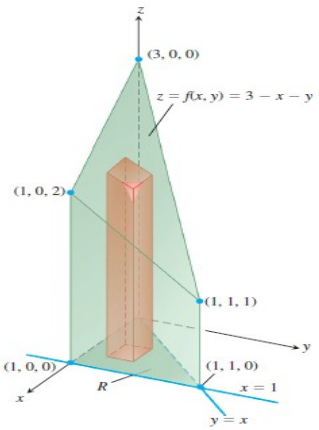
Teorem: Fubini Teoremi (Kuvvetli Form)

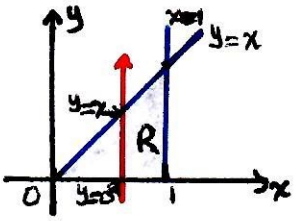
$f(x,y)$, bir R bölgesinde sürekli olsun.

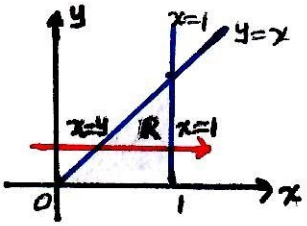
1) Eğer R, g_1 ve g_2 $[a,b]$'de sürekli olmak üzere $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ ile tanımlıysa
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$
dir.

2) Eğer R, h_1 ve h_2 $[c,d]$'de sürekli olmak üzere $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ ile tanımlıysa
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$
dir.

Örnekler: 1) Tabanı, xy-düzleminde x-ekseni, $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlı üçgen, üstü $z=f(x,y)=3-x-y$ olan prizmanın hacmini bulunuz.







$$H = V = \text{Hacim} = \int_0^1 \int_0^x (3-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 \text{ br}^3$$

$$H = \int_0^1 \int_y^1 (3-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(3x - \frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_{x=y}^{1} dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = 1 \text{ br}^3.$$

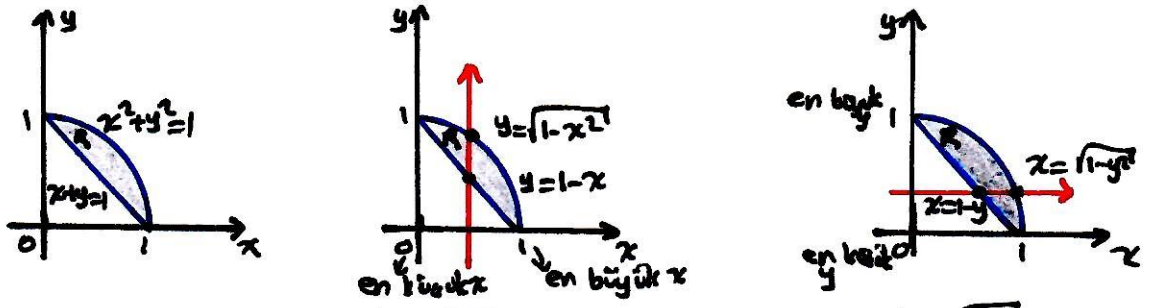
2) R, xy-düzleminde x-ekseni, $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlı üçgen olmak üzere
$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA$$
integralini hesaplayınız.

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$$ integralini hesaplayamıyoruz.

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \left(y\,\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_0^x dx = \int_0^1 \sin x\,dx = -\cos 1 + 1.$$

İntegrasyon Sınırlarını Bulma

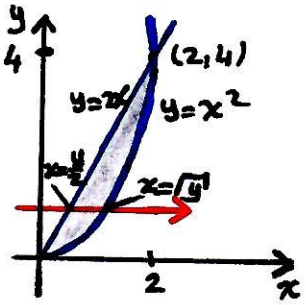
Bazı bölgeler için integral sınırlarını nasıl belirleyeceğimizi görelim.



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=0}^{1}\int_{x=1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Örnek: $\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx$ integralinin integrasyon bölgesini çiziniz ve integrasyon sırasını değiştirerek denk integrali yazınız.

İntegrasyon bölgesi, $x^2 \le y \le 2x$ ve $0 \le x \le 2$ eşitsizliği ile verilmiştir. Buna göre bölge, $x=0$ ve $x=2$ arasında $y=x^2$ ve $y=2x$ eğrileriyle sınırlıdır.



İntegrasyon sırasını değiştirdiğimizde verilen integrale denk integral

$$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(4x+2)\,dx\,dy$$

dir.

İki Katlı İntegrallerin Özellikleri

Bir R sınırlı bölgesinde $f(x,y)$ ve $g(x,y)$ fonksiyonları sürekliyse

1) $\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$ (c herhangi bir sayı)

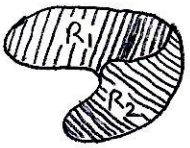
2) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$

3) a) R üzerinde $f(x,y) \ge 0$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA \ge 0$

b) R üzerinde $f(x,y) \ge g(x,y)$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA \ge \iint_R g(x,y)\,dA$

4) R, birbirinin üzerine gelmeyen R_1 ve R_2 bölgelerinin birleşimi ise

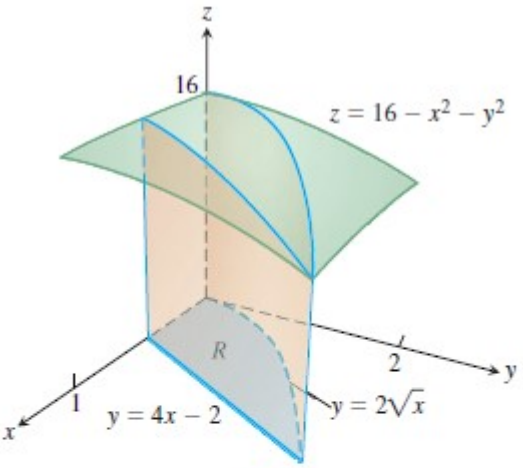
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$



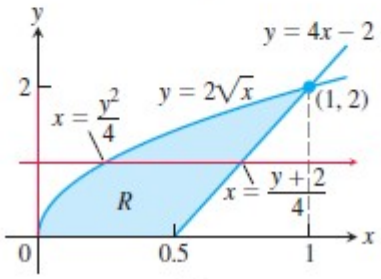
$R = R_1 \cup R_2$

özellikleri sağlanır.

Örnek: $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, $y = 4x-2$ doğrusu ve x-ekseni tarafından sınırlanan R bölgesi üzerinde $z = 16 - x^2 - y^2$ yüzeyi altında, kama benzeri katı cismin hacmini bulunuz.



(a)



(b)

$$H = \iint_R (16 - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_{y^2/4}^{\frac{(y+2)}{4}} (16 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

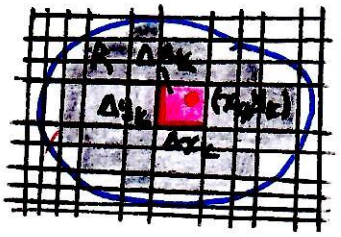
$$= \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - y^2 x\right) \Big|_{y^2/4}^{\frac{y+2}{4}} dy$$

$$= \int_0^2 \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} - 4y^2 + \frac{y^6}{3 \cdot 64} + \frac{y^4}{4}\right] dy$$

$$= \left[\frac{191y}{24} + \frac{63y^2}{32} - \frac{145y^3}{96} - \frac{49y^4}{768} + \frac{y^5}{20} + \frac{y^7}{1344}\right]_0^2$$

$$= \frac{20803}{1680}.$$

15.3 İki Katlı İntegral ile Alan



R bölgesi üzerinde iki katlı integral tanımında $f(x,y)=1$ alırsak, Riemann toplamları

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$$

formuna indirgenir. Bu, R'nin parçalanışındaki küçük dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır. Eğer parçalanışın normunu sıfıra yaklaştırırsak, çıkan limit, R'nin alanını tanımlar:

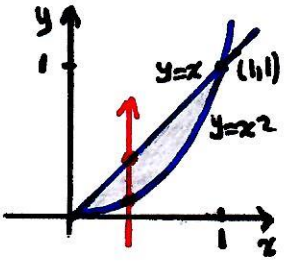
$$\text{Alan} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_R dA.$$

Tanım: Düzlemde, kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı

$$A = \iint_R dA$$

dır.

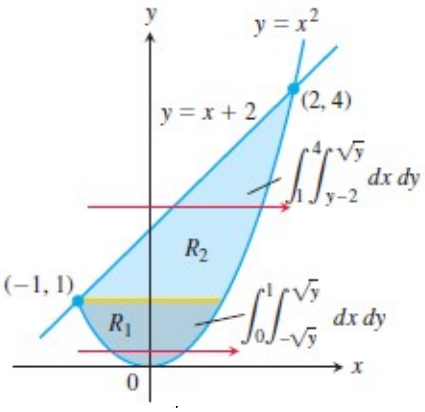
Örnekler: 1) Birinci dörttebir bölgede $y=x$ ve $y=x^2$ eğrileri ile sınırlı kapalı R bölgesinin alanını bulunuz.



$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\ \text{br}^2$$

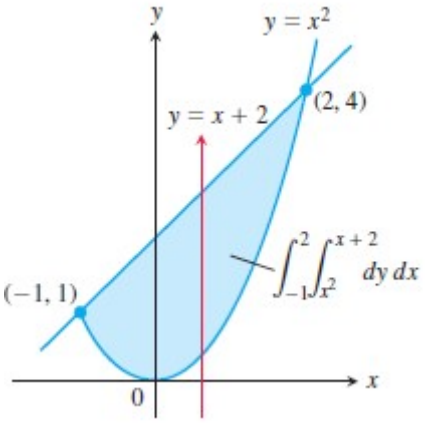
2) $y=x+2$ doğrusu ve $y=x^2$ parabolü ile sınırlanan kapalı R bölgesinin alanını bulunuz.



Soldaki şekilde olduğu gibi R bölgesini R_1 ve R_2 bölgelerine bölersek alanı:

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

olarak hesaplayabiliriz.



Sağdaki şekilde olduğu gibi, integrasyon sırasını ters çevirirsek, tek integral

ve daha kolay alanı hesaplayabiliriz.!

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_{-1}^{2}\left(y\Big|_{x^2}^{x+2}\right)dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}\ br^2.$$

Ortalama Değer

Kapalı bir aralık üzerinde, tek değişkenli integrallenebilir bir fonksiyonun ortalama değeri, aralık üzerindeki fonksiyonun integralinin aralığın uzunluğuna bölümüydü. Düzlemde bir sınırlı bölge üzerinde tanımlı iki değişkenli integrallenebilir bir fonksiyonun ortalama değeri, bölge üzerinde integralin değerinin bölgenin alanına bölümüdür.

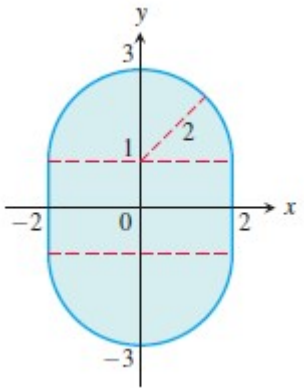
$$\boxed{R \text{ bölgesi üzerinde } f\text{'nin } \underline{\text{ortalama değeri}} = \frac{1}{R\text{'nin alanı}}\iint_R f\,dA \quad \text{dır.}}$$

Örnek: $R: 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le 1$ dikdörtgeni üzerinde $f(x,y)=x\cos(xy)$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\left(\sin(xy)\Big|_0^1\right)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

R'nin alanı π'dir. R üzerinde f'nin ortalama değeri $\frac{2}{\pi}$ dir.

Örnek: $R: -2\le x\le 2,\ -1-\sqrt{4-x^2}\le y\le 1+\sqrt{4-x^2}$ ile belirlenen oyun alanının alanını, a) Fubini Teoremi b) Basit geometri kullanarak bulunuz.



a) Simetriden dolayı R'nin alanı, birinci dörttebir bölgeye ait alanın 4 katıdır.

$$A=\iint_R dA=4\int_0^2\int_0^{1+\sqrt{4-x^2}} dy\,dx=4\int_0^2\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$=4\left(x+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2=8+4\pi.$$

b) R bölgesi, iki tarafına yarıçapı 2 olan yarım diskler monte edilmiş bir dikdörtgenden oluşur. Yarıçapı 2 olan çember ve boyutları 4×2 olan dikdörtgenin alanlarının toplamı:

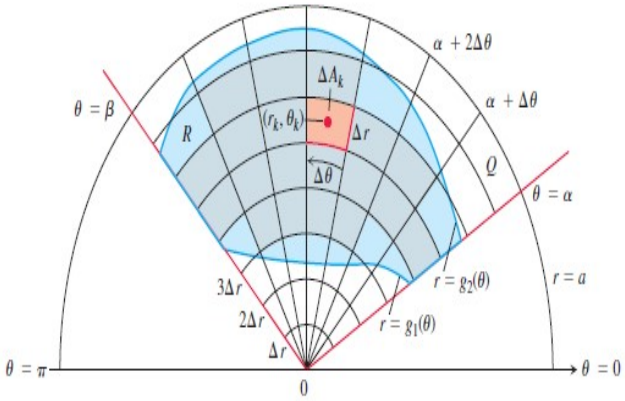
$$A=\pi 2^2+4\cdot 2=8+4\pi$$

dir.

15.4 Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller

İntegralleri, kutupsal koordinatlara geçtiğimizde hesaplaması bazen daha kolaydır.

Kutupsal Koordinatlarda İntegraller



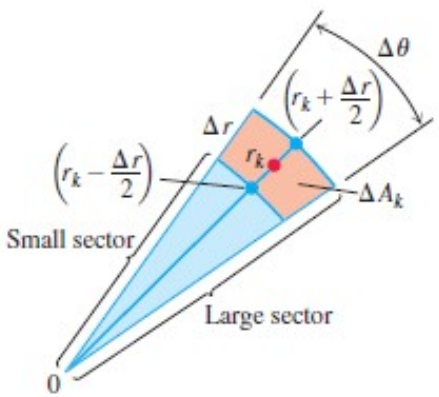
$r = g_1(\theta)$ ve $r = g_2(\theta)$ sürekli eğrileri ve $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ışınları arasında sınırlı bir R bölgesi üzerinde bir $f(r,\theta)$ fonksiyonu tanımlı olsun. α ve β arasındaki θ değerleri için $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ olsun. R bölgesi, $0 \le r \le a$, $\alpha \le \theta \le \beta$ bölgesinin içindedir. R'yi çembersel yay ve ışınlar ile kaplayabiliriz. Yaylar orjin merkezli, $\Delta r, 2\Delta r, \dots, m\Delta r$ yarıçaplı çemberlerin kesilmesiyle oluşur. Işınlar $\theta = \alpha$, $\theta = \alpha + \Delta\theta$, $\theta = \alpha + 2\Delta\theta, \dots, \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$ ile verilir. Burada $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$ dür. R'nin içinde kalan kutupsal dikdörtgenlerin alanlarını $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ olarak sıralayalım. (r_k, θ_k) alanı ΔA_k olan kutupsal dikdörtgende herhangibir nokta olsun. Sonra aşağıdaki toplamı oluşturalım:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\,\Delta A_k$$

Eğer f, R bölgesinde sürekli ise Δr ve $\Delta\theta$ sıfıra giderken, bu toplam bir limite yakınlaşır. Bu limite R üzerinde f'nin iki katlı integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)\,dA$$

ile gösterilir. Bu limiti hesaplamak için, önce S_n toplamını Δr ve $\Delta\theta$ terimleriyle yazmalıyız.



ΔA_k = büyük dilimin alanı − küçük dilimin alanı

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]\Delta\theta = \frac{1}{2}(2r_k\Delta r)\Delta\theta$$

$$= r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Buna göre $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\, r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$ dır. İki katlı integral $\iint_R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$ şeklindedir. Fubini Teoremine göre, r ve θ'ya göre tekrarlı tek integral olarak

integrali hesaplayabiliriz. $\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

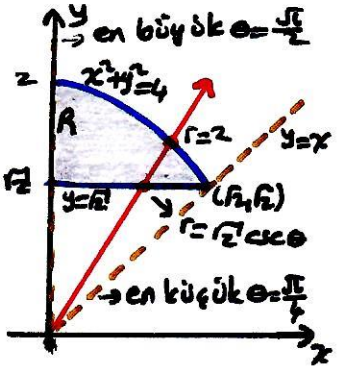
İntegrasyon Sınırlarını Bulma

Kartezyen koordinat sisteminde olduğu gibi kutupsal koordinat sisteminde de, R bölgesinde $\iint_R f(r,\theta)\,dA$ integralini hesaplamak için önce r'ye göre, daha sonra θ'ya göre integral aşağıdaki adımlarla alınır.

1) Bölge ve sınır eğrileri çizilir.

2) r'nin artım yönünde R bölgesinden geçen bir ışın çizilir ve ışının bölgeye girdiği eğri ($r = \sqrt{2}\csc\theta$) ve çıktığı eğri ($r=2$) belirlenerek r'nin sınırları bulunur.

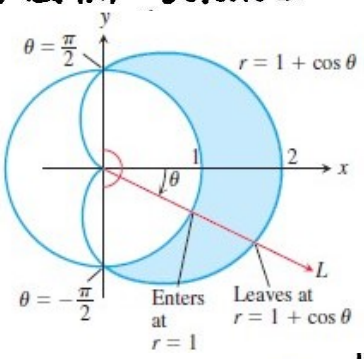
3) R'nin sınırı olan θ değerinin en küçük ve en büyük değerleri bulunarak θ'nın sınırları belirlenir.



$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{2} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Örnek: $r = 1+\cos\theta$ kardiyotunu içi ve $r=1$ çemberinin dışı olan R bölgesi üzerinde $f(r,\theta)$ fonksiyonunun integrasyon sınırlarını bulunuz.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



Kutupsal Koordinatlarda Alan

Kutupsal koordinat düzleminde, kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin alanı

$$A = \iint_R r\, dr\, d\theta$$

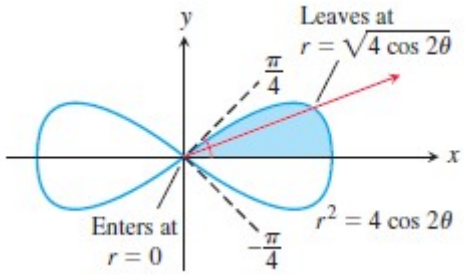
dır.

Örnek: $r^2 = 4\cos 2\theta$ lemniskatının alanını bulunuz.

Simetriden dolayı:

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}}\right) d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = 4\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = 4.$$



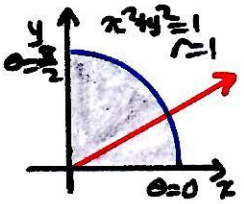
Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Dönüştürmek

Kartezyen $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ integralini kutupsal integrale iki adımda dönüştürürüz. Önce kartezyen integralde $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ yerine konur ve $dx\,dy$ yerine $r\,dr\,d\theta$ yazılır. Sonra da R'nin sınırı için kutupsal integralin integral sınırları bulunur. Bu durumda, kartezyen integral

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

formunda olur. Burada, G, kutupsal koordinatlarda integrasyon bölgesini göstermektedir.

Örnekler: 1) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.



Bu soruyu kartezyen koordinatlarda çözmeye çalışırsak

$$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right)dx$$

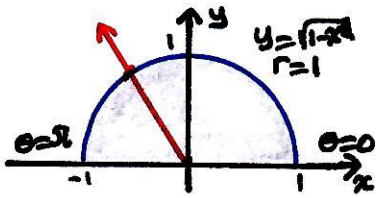
hesabın zorluğunu görebiliriz. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal koordinatlara dönüştürürsek

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{8}.$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi ve x-ekseniyle sınırlı yarı-dairesel R bölgesinde

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

integralini hesaplayınız.



Kartezyen koordinatlarda, bu integrali, x'e veya y'ye göre integre edemeyiz. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ dönüşümüyle

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}e^{r^2}\right)\Big|_0^1 d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e-1)\,d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1).$$

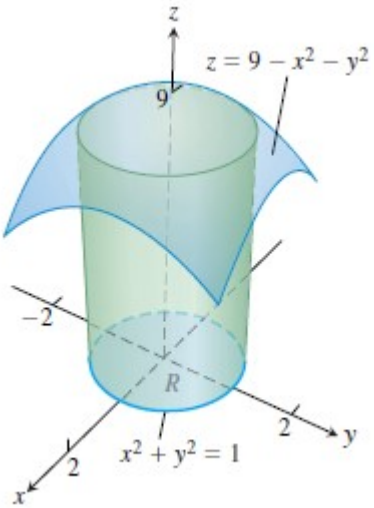
3) Altten, xy-düzleminde birim çember ve üstten, $z=9-x^2-y^2$ paraboloidi ile sınırlanmış katı cismin hacmini bulunuz.

R integrasyon bölgesi, $x^2+y^2=1$ çemberidir. Kutupsal koordinatlarda $r=1$, $0\le\theta\le 2\pi$ ile tanımlarız.

$$\iint_R (9-x^2-y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{17}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{17\pi}{2}.$$

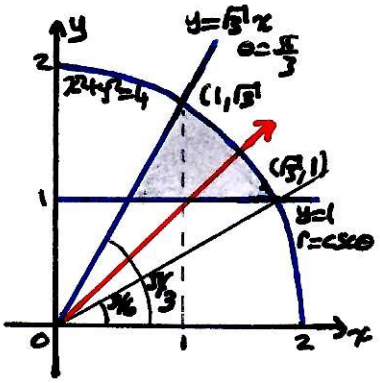


4) xy-düzleminde, $y=\sqrt{3}x$ doğrusunun altında, $y=1$ doğrusunun üstünde ve $x^2+y^2=4$ çemberiyle sınırlanmış kapalı R bölgesinin alanını kutup sal integrasyon kullanarak bulunuz.

$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2=4$ çemberi ile $y=1$ doğrusunun kesişimi $x=\sqrt{3}$ dür.

$(\sqrt{3},1)$'den geçen doğrunun eğimi $\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$ dır.



$$\iint_R dA = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2} r\,dr\,d\theta$$

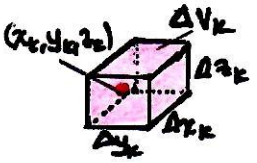
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{1}{2}r^2\Big|_{\csc\theta}^{2}\right)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}(4-\csc^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left(4\theta+\cot\theta\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{6}+\sqrt{3}\right) = \frac{\pi-\sqrt{3}}{3}.$$

15.5 Dikdörtgensel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Üç Katlı İntegraller

$F(x,y,z)$, uzayda kapalı sınırlı bir D bölgesinde tanımlı olsun. D bölgesini, koordinat eksenlerine dik düzlemler ile dikdörtgensel hücrelere ayırarak parçalıyoruz. D'nin içindeki hücreleri 1'den n'ye kadar sıralıyoruz. k. hücrenin boyutları Δx_k, Δy_k, Δz_k ve hacmi ΔV_k ile gösteriliyor. Her hücreden bir (x_k, y_k, z_k) noktası seçelim ve



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$$

toplamını oluşturalım.

Hücreleri gittikçe küçülterek, $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$'nın en büyük aralığı parçalanışın normu $\|P\|$'yi, sıfıra yaklaştırdığımızda, parçalanış ve seçtiğimiz noktalardan bağımsız tek bir limit değeri elde edilirse F'ye D üzerinde <u>İntegrallenebilir</u> diyoruz. Eğer F sürekli ve D'nin sınır yüzeyi düzgün yüzeyden (sonlu sayıda) oluşmuşsa, F integrallenebilirdir. Bu integrale D üzerinde <u>üç katlı integral</u> denir ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\,dV \quad \text{veya} \quad \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ile gösterilir.

Üç katlı İntegrallerin Özellikleri

1) $\iiint_D kF\,dV = k\iiint_D F\,dV$ (k sabit) 2) $\iiint_D (F \pm G)\,dV = \iiint_D F\,dV \pm \iiint_D G\,dV$

3) a) D üzerinde $F \geq 0$ ise $\iiint_D F\,dV \geq 0$

b) D üzerinde $F \geq G$ ise $\iiint_D F\,dV \geq \iiint_D G\,dV$

4) D birbirinin üzerinde olmayan hücrelerin birleşimi ise

$$\iiint_D F\,dV = \iiint_{D_1} F\,dV + \iiint_{D_2} F\,dV + \dots + \iiint_{D_n} F\,dV \quad \text{dir.}$$

Uzayda Bir Bölgenin Hacmi

Eğer $F(x,y,z)=1$ alınırsa, $S_n=\sum_{k=1}^{n} F(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k$ ve limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k=\iiint_D dV$$

D'nin hacmini üç katlı integral olarak verecektir.

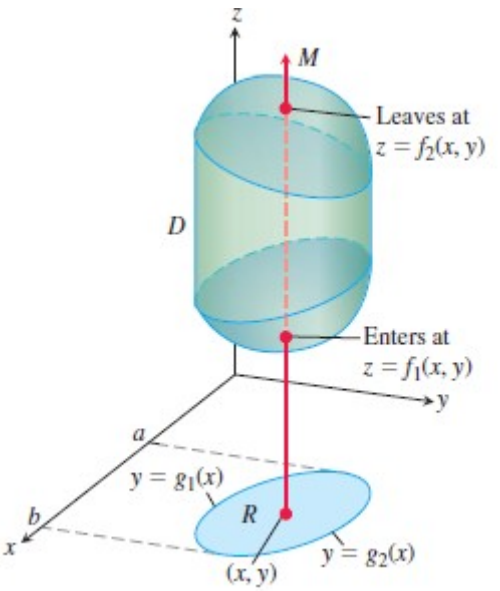
Tanım: Uzayda kapalı ve sınırlı bir D bölgesinin hacmi

$$V=H=\iiint_D dV$$

dir.

İntegral Sınırlarını Bulma

D üzerinde $\iiint_D F(x,y,z)\,dV$ integralini önce z'e sonra y'ye sonra x'e göre hesaplamak için, aşağıdaki adımları izlemeliyiz.



1) D ve xy-düzlemine dik izdüşümü R bölgesi çizilmeli. D'nin alt ve üst yüzeyleri ve R'nin alt ve üst eğrileri işaretlenmelidir.

2) İntegrasyonunun z-sınırları için z-eksenine paralel ve D bölgesinden geçen bir doğru z'nin artım yönünde çizilmelidir.

D'ye giriş yüzeyi $z=f_1(x,y)$ ve çıkış yüzeyi $z=f_2(x,y)$, z'nin sınırlarıdır.

3) İntegrasyonun y-sınırları için, xy-düzleminde y-eksenine paralel ve R bölgesinden geçen, y'nin artım yönünde bir doğru çizilmelidir. Doğrunun, bölgeye giriş eğrisi $y=g_1(x)$ ve çıkış eğrisi $y=g_2(x)$ y'nin sınırlarıdır.

4) İntegrasyonun x-sınırları, bölgeden geçen y'ye paralel doğruların başlangıç $x=a$'dan sonu $y=b$'ye kadardır.

Buna göre üç katlı integralin sınırları aşağıdaki şekildedir:

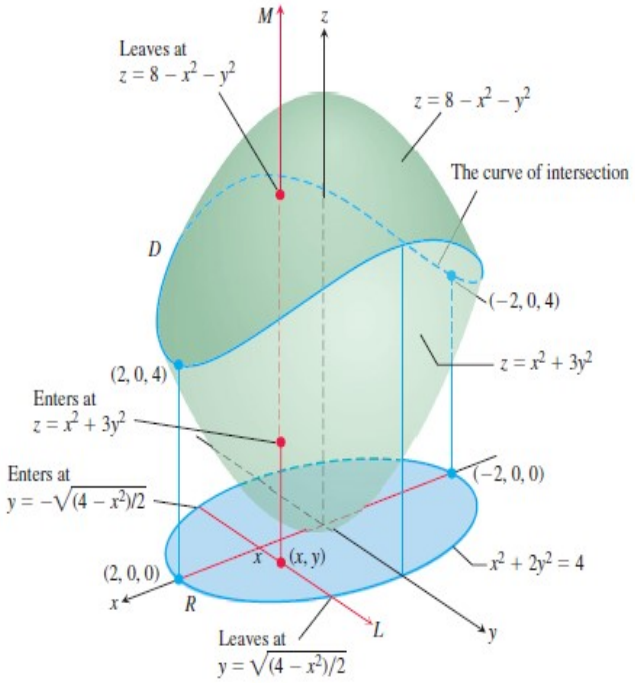
$$\iiint_D F(x,y,z)\,dV=\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Örnekler: 1) $z = x^2+3y^2$ ve $z = 8-x^2-y^2$ yüzeyleri arasında kalan kapalı D bölgesinin hacmini bulunuz.

$z=x^2+3y^2$ ve $z=8-x^2-y^2$ yüzeylerinin kesişimi

$$x^2+3y^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+2y^2=4,\ z>0$$

eliptik silindirdir. R bölgesinin sınırı, D'nin xy-düzlemi üzerine izdüşümü, $x^2+2y^2=4$ elipsidir. Buna göre hacim,



$$H=\iiint_D dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

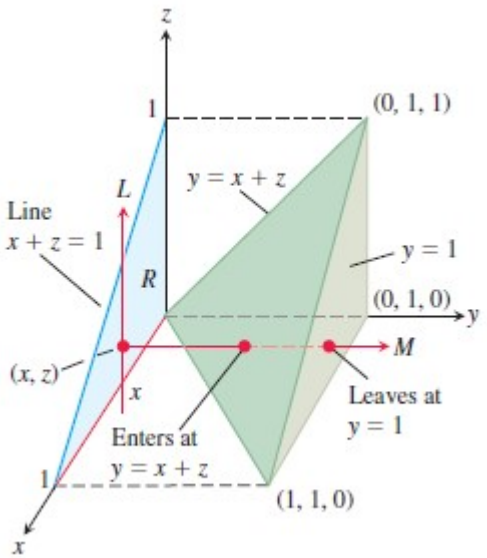
$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}(8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y-4\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx$$

$$=8\pi\sqrt{2}.$$

2) Köşe noktaları $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ ve $(0,1,1)$ olan D dörtyüzlüsü (tetrahedron) üzerinde bir $F(x,y,z)$ fonksiyonunun üç katlı integralini hesaplamak için integrasyon sınırlarını yazınız.

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1}F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx.$$

3) 2. sorudaki dörtyüzlünün hacmini bulunuz.

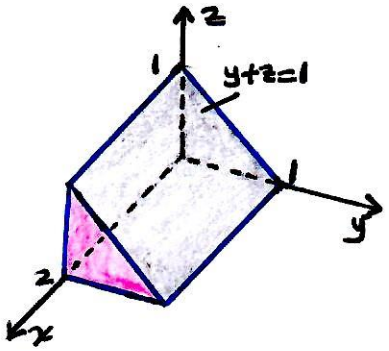


$$V=\int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x}dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_x^1(y-x)\,dy\,dx=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}y^2-xy\right)\Big|_x^1dx$$

$$=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\tfrac{1}{6}$$

Diğer sıralamalar derste yapılacaktır. (Ayrıntılar derste anlatılacaktır.)



4) Yandaki şekilde verilen katı cismin hacmini veren integraller şu şekildedir:

a) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz$ b) $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dx\,dz\,dy$

c) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-z} dy\,dx\,dz$ d) $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dz\,dx$

e) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$ f) $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$

$$H=V=\text{Hacim}=\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{1-z} 2\,dy\,dz=\int_0^1 2(1-z)\,dz=(2z-z^2)\Big|_0^1=1.$$

veya

$$H=\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^2 (1-y)\,dx\,dy=\int_0^1 2(1-y)\,dy=(2y-y^2)\Big|_0^1=1.$$

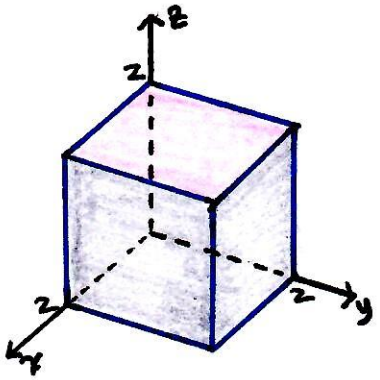
Uzayda Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Uzayda bir D bölgesi üzerinde bir F fonksiyonunun ortalama değeri

$$\text{D üzerinde F'nin Ortalama Değeri}=\frac{1}{\text{D'nin hacmi}}\iiint_D F\,dV$$

ile tanımlanır.

Örnek: Birinci sekizdebir oktantda koordinat düzlemleri ve $x=2$, $y=2$, $z=2$ düzlemleriyle sınırlı küp üzerinde $F(x,y,z)=xyz$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.



küpün hacmi $2.2.2=8$ br³dür.

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}yz\right)\Big|_0^2 dy\,dz$$

$$=\int_0^2\int_0^2 2yz\,dy\,dz$$

$$=\int_0^2 (y^2z)\Big|_0^2 dz=\int_0^2 4z\,dz$$

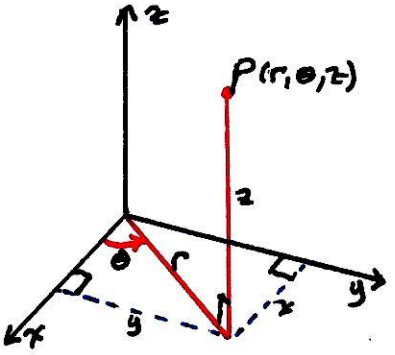
$$=2z^2\Big|_0^2=8.$$

$$\text{küp üzerinde F'nin ortalama değeri}=\frac{1}{\text{hacim}}\iiint_{\text{küp}} xyz\,dV=\frac{1}{8}\cdot 8=1 \text{ dir.}$$

15.7 Silindirik ve Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Silindirik Koordinatlarda İntegrasyon

Uzayda silindirik koordinatları, xy-düzleminde kutupsal koordinatları, kartezyen dik sistemdeki z-ekseni ile birleştirerek elde ediyoruz.



Tanım: Silindirik koordinatlar, uzayda bir P noktasını sıralı (r,θ,z) üçlüsü ile temsil eder, burada $r \geq 0$ ve

1) r ve θ, xy-düzleminde P'nin dikey izdüşümünün kutupsal koordinatlarıdır.
2) z dikdörtgensel dik koordinattır.

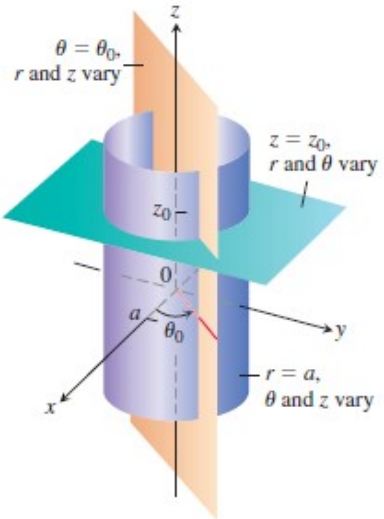
şartları sağlanır.

Dikdörtgensel (x,y,z) ve silindirik (r,θ,z) koordinatları Arasındaki Denklemler

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$r^2 = x^2+y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

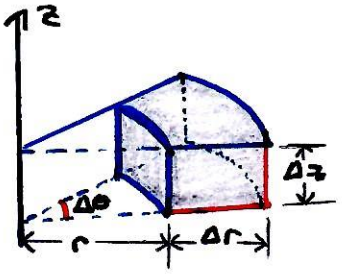
Silindirik koordinatlarda $r=a$ denklemi xy-düzleminde çember değil, silindir ekseni z-ekseni olan çembersel silindiri tanımlar. z-ekseni $r=0$ ile verilir. $\theta=\theta_0$ denklemi, z-eksenini içeren pozitif x-ekseni ile θ_0 açısına sahip düzlemi tanımlar. $z=z_0$ denklemi, z-eksenine dik bir düzlemi (xy-düzlemine paralel) tanımlar.



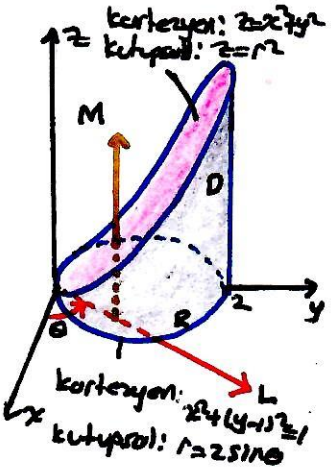
Silindirik koordinatlarda bir D bölgesinin parçalanmasındaki küçük silindirik kama (takoz)nın hacmi (birim hacim)

$$dV = dz\,r\,dr\,d\theta$$

formundadır.



Örnek: Aşağıdan $z=0$ düzlemi, yandan (yanlardan) $x^2+(y-1)^2=1$ çembersel silindiri ve üstten $z=x^2+y^2$ paraboloidi ile sınırlı D bölgesi üzerinde bir $f(r,\theta,z)$ fonksiyonunu integre etmek için silindirik koordinatlarda integrasyon sınırlarını bulunuz.



D'nin tabanı, aynı zamanda xy-düzlemi üzerinde bölgenin izdüşümü R dir. Kutupsal koordinatlarda denklemi:

$$x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow r^2-2r\sin\theta=0$$

$r=\sin\theta$ dır. Buna göre

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

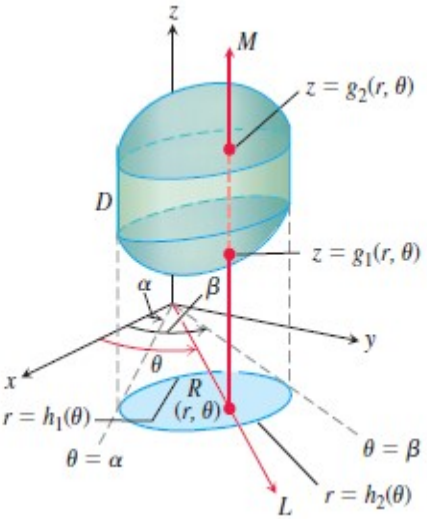
dır.

Silindirik Koordinatlarda İntegrasyon Sınırlarını Bulma

Uzayda, silindirik koordinatlarda, bir D bölgesi üzerinde

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV$$

integralini önce z'ye sonra r'ye ve son olarakta θ'ya göre integre etmek için aşağıdaki adımlar izlenir:



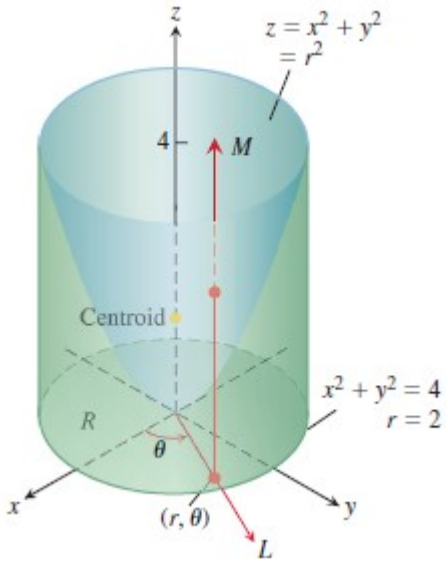
1) D ve izdüşümü R xy-düzleminde çizilir. D'nin sınırı yüzeyler ile R'nin sınırı eğriler isimlendirilir.
2) İntegrasyonunun z-sınırları için, D bölgesinden geçen z-eksenine paralel bir M doğrusu z'nin artım yönünde çizilir. M'nin D'ye girdiği yüzey $z=g_1(r,\theta)$ ve çıktığı yüzey $z=g_2(r,\theta)$ dır. Bunlar, integrasyonun z-sınırlarıdır.
3) İntegrasyonunun r-sınırları için, orjinden R bölgesinden geçen bir L ışını çizilir. Işının R bölgesine girdiği eğri $r=h_1(\theta)$ ve çıktığı eğri $r=h_2(\theta)$ dır. Bunlar integrasyonun r-sınırlarıdır.
4) İntegrasyonun θ sınırları, L ışının x-ekseni ile pozitif açı yaptığı R'yi tarayan $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ sınırlarıdır.

İntegral $$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{z=g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

dır.

Örnek: Altta xy-düzlemi, üstten $z=x^2+y^2$ paraboloidi yandan $x^2+y^2=4$ silindiri ile sınırlanan kapalı katı cismin hacmini bulunuz.

D bölgesi altta $z=0$ düzlemi üstten $z=r^2$ paraboloidi ile sınırlıdır. Tabanı R, xy-düzleminde $0\le r\le 2$ disktir.



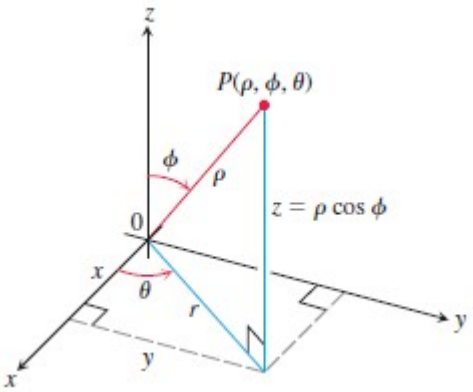
$$H = \text{Hacim} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} dz\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right)d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

Küresel Koordinatlar ve İntegrasyon

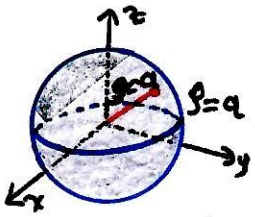
Küresel koordinatlar, uzayda noktaları iki açı bir uzunluk ile gösterirler. Birinci koordinat, $\rho = |\vec{OP}|$, noktanın orjinden uzaklığıdır. İkinci koordinat, ϕ, $\vec{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açıdır. Üçüncü koordinat silindirik koordinatlarda ölçülen θ açısıdır.



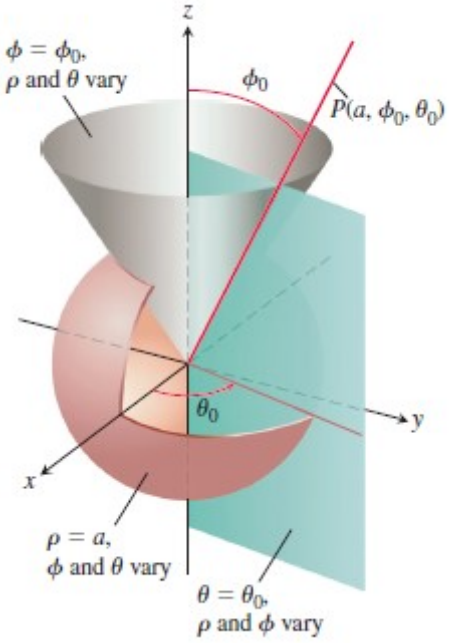
Tanım: Küresel koordinatlar, uzayda bir P noktasını, aşağıdaki koşulları sağlayan sıralı (ρ, ϕ, θ) üçlüsü ile temsil eder.

1) ρ, P'nin orjine uzaklığıdır.
2) ϕ, $\vec{OP}$'nin pozitif z-ekseni ile yaptığı açıdır. $0\le\phi\le\pi$ dir.
3) θ, silindirik koordinatlardaki açıdır.

$\rho=a$ denklemi orjin merkezli a yarıçaplı küreyi tanımlar.



$\phi=\phi_0$ denklemi, köşesi orjinde ekseni z-ekseni olan bir koni tanımlar. $0<\phi<\frac{\pi}{2}$, $\phi=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\phi<\pi$ ve $\phi=0$, $\phi=\pi$ olması durumlarını açıklayınız.



$\theta=\theta_0$ denklemi, pozitif x-ekseni ile θ_0 açısı yapan ve z-eksenini içeren yarım düzlemi tanımlar.

Küresel Koordinatlar ile Kartezyen ve Silindirik Koordinatlar Arasındaki Denklemler

$r=\rho\sin\phi$, $\quad x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta$ $\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$

$y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi$

Örnekler: 1) $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ küresinin denklemini küresel koordinatlarda yazınız.

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \Rightarrow \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta+(\rho\cos\phi-1)^2=1 \Rightarrow$$

$$\rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\cos^2\phi-2\rho\cos\phi+1=1 \Rightarrow$$

$$\rho^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)-2\rho\cos\phi=0 \Rightarrow$$

$$\rho^2=2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho=2\cos\phi. \quad (\rho>0)$$

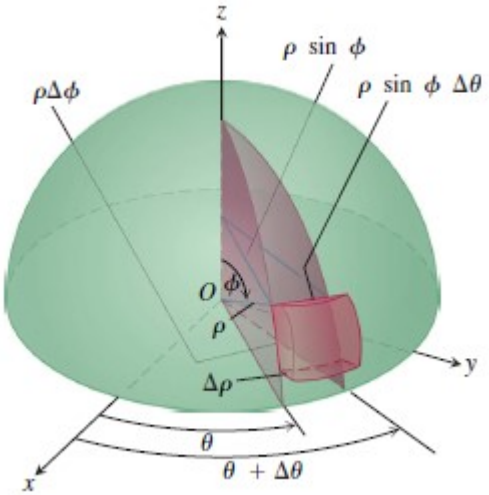
2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin denklemini küresel koordinatlarda bulunuz.

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \Rightarrow \rho\cos\phi=\rho\sin\phi,\ \rho>0,\ \sin\phi\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos\phi=\sin\phi \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4} \qquad 0\leq\phi\leq\pi$$

Geometrik çözüm: Koni z-eksenine göre simetriktir. yz-düzleminin birinci bölgesinde $z=y$ doğrusunu verir. Koni ile pozitif z-ekseni arasındaki açı $\frac{\pi}{4}$ dür. Konini denklemi $\phi=\frac{\pi}{4}$ dür.

Küresel koordinatlarda, hacim elementi, $d\rho$, $d\phi$, $d\theta$ diferansiyelleri tarafından tanımlanan bir küresel kama (takoz) nın hacmidir.



Kama yaklaşık olarak bir dikdörtgensel kutudur. Bir kenarı $\rho d\phi$ uzunluklu bir çembersel yay, diğer kenarı $\rho \sin\phi \, d\theta$ uzunluklu bir çembersel yay ve kalınlığı $d\rho$ dur. Bu yüzden, küresel koordinatlarda hacim elementi

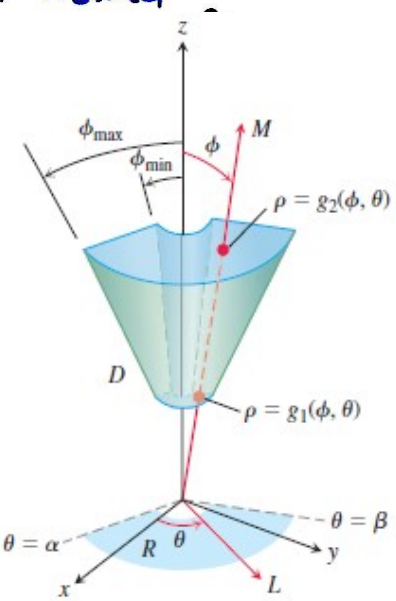
$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

ve üç katlı integral

$$\iiint F(\rho, \phi, \theta) dV = \iiint F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

şeklindedir.

Küresel Koordinatlarda İntegrasyon Sınırlarını Bulma



Uzayda, küresel koordinatlarda bir D bölgesi üzerinde

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) dV$$

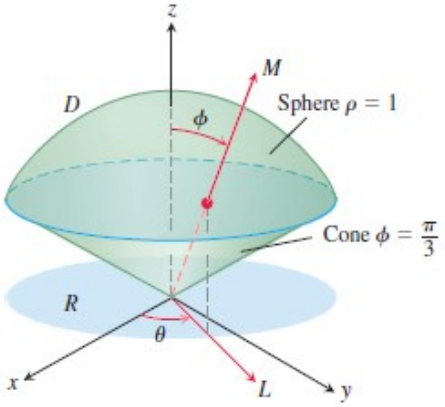
integralini, önce ρ'ya, sonra ϕ'ye ve son olarakta θ'ya göre integre etmek için aşağıdaki adımlar izlenir.

1) D bölgesi ve xy-düzlemine izdüşümü R bölgesi çizilir. D'nin sınır yüzeyleri isimlendirilir.
2) İntegrasyonun ρ-sınırı için, D bölgesinden geçen, orjinden başlayıp pozitif z-ekseni ile ϕ açısı yapan M doğrusu çizilir. ρ'nun artma yönünde D bölgesine girdiği yüzey $\rho = g_1(\phi, \theta)$ ve çıktığı yüzey $\rho = g_2(\phi, \theta)$ dır. Bunlar, ρ'nun integrasyon sınırlarıdır.
3) İntegrasyonun ϕ sınırları için, M doğrusunun yaptığı ϕ açısının maksimum ve minimumu, ϕ_{maks} ve ϕ_{min} bulunur. Bunlar, ϕ'nin integrasyon sınırlarıdır.
4) İntegrasyonun θ sınırları için, L ışınının R'yi süpürdüğü α'dan β'ya açılar bulunur. Bunlar, θ'nın integrasyon sınırlarıdır. Bu durumda integral,

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{\phi=\phi_{min}}^{\phi_{maks}} \int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{g_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

dır.

Örnekler: 1) $\rho \le 1$ katı küresinin $\phi = \frac{\pi}{3}$ konisi ile kesilmesinden elde edilen D "dondurma külahının" hacmini bulunuz.



$$H = V = \text{Hacim} = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos\phi \Big|_0^{\pi/3} \right) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

2) Yukarıdaki sorudaki D bölgesinde $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun integralini hesaplayınız.

D bölgesinin küresel koordinatlarda integral sınırlarını biliyoruz. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ kartezyen denkleminin küresel koordinatlarda karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$x^2 + y^2 = (\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 = \rho^2 \sin^2\phi.$$

Buna göre,

$$\iiint_D f(x,y,z) \, dV = \iiint_D f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_D \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \iiint_D \rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 \right) \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{5} \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{5} (1 - \cos^2\phi) \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

15.8 Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, çok değişkenli fonksiyonlarda da değişken değiştirme karışık integralleri, daha basit hale getirip hesaplamak için bir yöntemdir. Değişken değiştirme integrandı basitleştirebileceği gibi integral sınırlarını da basitleştirebilir veya her ikisini birden basitleştirebilir.

İki Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

12.3 bölümünde anlattığımız kutupsal koordinatlardaki değişken değiştirme, iki katlı integrallerde daha genel değişken değiştirme yönteminin bir özel halidir.

uv-düzleminde bir G bölgesi,

$$x=g(u,v), \qquad y=h(u,v)$$

formundaki denklemlerle xy-düzleminde R bölgesine bire-bir dönüştüğünü düşünelim. R'ye G'nin görüntüsü (image) ve G'ye R'nin ilkgörüntüsü (preimage) diyeceğiz. R üzerinde tanımlı herhangi $f(x,y)$ fonksiyonunu G üzerinde tanımlı bir $f(g(u,v),h(u,v))$ fonksiyonu olarak düşünebiliriz. R üzerinde $f(x,y)$'nin integrali ile G üzerinde $f(g(u,v),h(u,v))$'nin integrali arasındaki ilişki nasıldır?

Tek değişkenli durumda

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx=\int_a^b f(g(u))\,g'(u)du \qquad \begin{array}{l} x=g(u) \\ dx=g'(u)du \end{array}$$

değişken değiştirmede $g'(u)$ çarpanının yerine gelecek çarpanı J çarpanı ile gösteriyoruz. (Carl Jacobi) $dxdy$, $J\,du\,dv$ olmalı. g' olduğu gibi J, u ve v'ye bağlı bir fonksiyon olmalı. Ayrıca kısmi türev terimlerini içermelidir. Bu yüzden J'yi aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

Tanım: $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün <u>Jacobiyanı</u> veya <u>Jacobiyan determinantı</u>

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

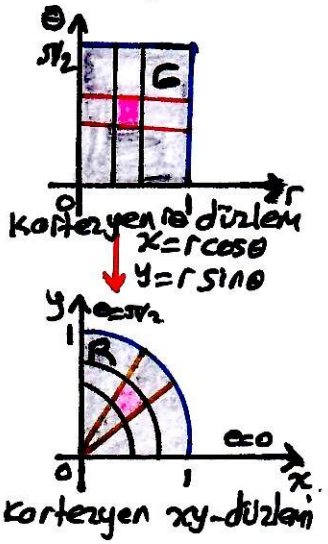
dır.

Teorem: $f(x,y)$, R bölgesi üzerinde sürekli olsun. G, $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ dönüşümü altında R'nin ilkgörüntüsü olsun. Eğer dönüşüm bire-bir ve G'nin içinde g ve h fonksiyonları sürekli birinci türevlere sahipse

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

dir.

Örnekler: 1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal koordinat dönüşümü için Jacobiyanı bulunuz ve $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ kartezyen integralini bir kutupsal integral olarak yazınız.



Yandaki şekilde görüldüğü gibi $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ denklemleri $G: 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2$ dikdörtgenini, xy-düzleminde birinci bölgedeki $x^2+y^2=1$ ile sınırlı çeyrek çemberine dönüştürüyor.

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

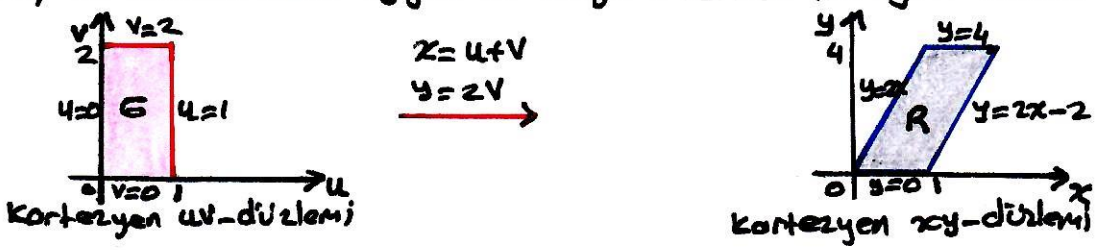
$$=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

Kutupsal koordinatlarda integrasyonda $r\ge 0$ olduğumundan $|J(r,\theta)|=|r|=r$ dir.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Burada sağ taraftaki integral, kutupsal koordinat düzleminde bir bölge üzerinde $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$'nın integrali değildir. Bu integral, kartezyen $r\theta$-düzleminde G bölgesi üzerinde $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ile r'nin çarpımının integralidir.

2) $u=\frac{2x-y}{2}$, $v=\frac{y}{2}$ dönüşümünü uygulayarak $\int_0^4\int_{y/2}^{\frac{y}{2}+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ integralini, uv-düzleminde uygun bir bölge üzerinde integre ediniz.



Önce x ve y'yi u ve v'nin terimlerine göre çözmeliyiz: $x=u+v$, $y=2v$. Sonra R'nin sınırlarından bu denklemler yardımıyla G'nin sınırlarını bulmalıyız:

R'nin sınırları için xy-denklemleri	G'nin sınırları için ilgili uv-denklemleri	uv-denklemlerinin sade hali
$x=\frac{y}{2}$	$u+v=2v/2=v$	$u=0$
$x=\frac{y}{2}+1$	$u+v=\frac{2v}{2}+1=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$

$$J=(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$\int_0^4\int_{y/2}^{y/2+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_{v=0}^{2}\int_{u=0}^{1}u\,|J(u,v)|\,du\,dv=\int_0^2\int_0^1 u.2\,du\,dv=2.$$

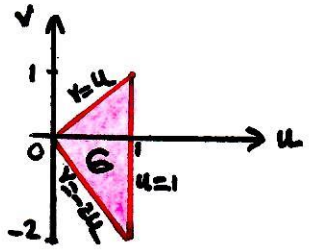
3) $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.

Bu örnekte, sınırlar benzer fakat integrandın daha basitleştirilebileceğini göreceğiz. $u=x+y$ ve $v=y-2x$ dönüşümü yapalım. x ve y'yi u ve v'nin terimleri cinsinden yazarsak

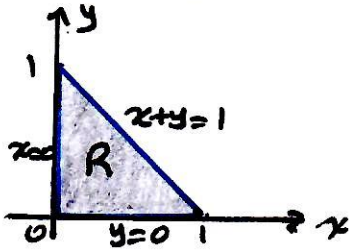
$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\ ,\quad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}$$

dir.

R'nin sınırları için xy-denklemleri	G'nin sınırları için ilgili uv-denklemleri	uv-denklemlerinin sade hali
$x+y=1$	$\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$	$u=1$
$x=0$	$\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$	$v=u$
$y=0$	$\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$	$v=-2u$



$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3}$$
$$y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}$$



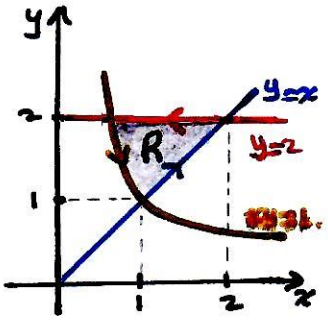
$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}v^2\,|J(u,v)|\,dv\,du$$

$$=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}v^2\,\tfrac{1}{3}\,dv\,du=\tfrac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left(\tfrac{1}{3}v^3\right)\Big|_{-2u}^{u}du$$

$$=\tfrac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du=\tfrac{2}{9}u^{9/2}\Big|_0^1=\tfrac{2}{9}.$$

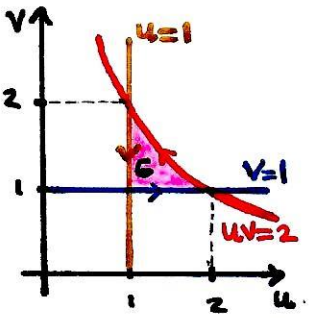
4) $\displaystyle\int_1^2\int_{1/y}^{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,e^{\sqrt{xy}}\,dx\,dy$ integralini hesaplayınız.



İntegrandtaki karakökleri basitleştirmek için $u=\sqrt{xy}$ ve $v=\sqrt{y/x}$ değişken dönüşümü yapalım. $u^2=xy$ ve $v^2=y/x \Rightarrow u^2v^2=y^2$ ve $u^2/v^2=x^2$ elde ederiz. $u>0$ ve $v>0$ olmak üzere

$$x=\frac{u}{v} \quad \text{ve} \quad y=uv$$

dir.



$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ v & u\end{vmatrix}=\frac{2u}{v}.$$

$$\iint_R\sqrt{\frac{y}{x}}\,e^{\sqrt{xy}}\,dx\,dy=\iint_G v e^u\,\frac{2u}{v}\,du\,dv=\iint_G 2ue^u\,du\,dv$$

sağ taraftaki integrandın daha basit olduğunu görebiliriz.

$$\int_1^2\int_{1/y}^{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,e^{\sqrt{xy}}\,dx\,dy=\int_1^2\int_1^{2/u}2ue^u\,dv\,du=2\int_1^2\left(vue^u\right)\Big|_1^{2/u}du=2\int_1^2(2e^u-ue^u)\,du$$

$$=2\left[(2-u)e^u+e^u\right]_{u=1}^{2}=2e(e-2).$$

Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Silindirik ve küresel koordinatlarda değişken değiştirme, üç katlı integrallerde değişken değiştirmenin özel durumlarıdır.

uvw-uzayında bir G bölgesi

$$x=g(u,v,w),\quad y=h(u,v,w),\quad z=k(u,v,w)$$

formundaki dif. denklemlerle xyz-uzayındaki D bölgesine bire-bir dönüştürülsün. D üzerinde tanımlı herhangi bir $F(x,y,z)$ fonksiyonu G üzerinde tanımlı

$$F(g(u,v,w),\, h(u,v,w),\, k(u,v,w)) = H(u,v,w)$$

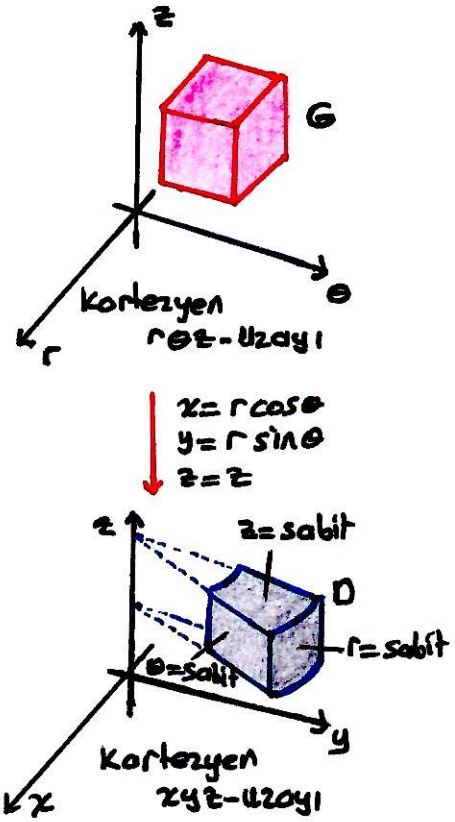
fonksiyonu olarak düşünülebilir. Eğer g, h ve k birinci kısmi türevleri sürekliyse D üzerinde $F(x,y,z)$'nin integrali, G üzerinde $H(u,v,w)$'nun integrali ile

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

denklemiyle bağlantılıdır. Burada, $|J(u,v,w)|$ çarpanı Jacobian determinantı

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

mutlak değeridir.



- Silindirik koordinatlar için u, v, w yerine r, θ ve z alınır. Kartezyen $r\theta z$-uzayından kartezyen xyz-uzayına dönüşüm

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

denklemleri ile verilir. Dönüşümün Jacobiyeni

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

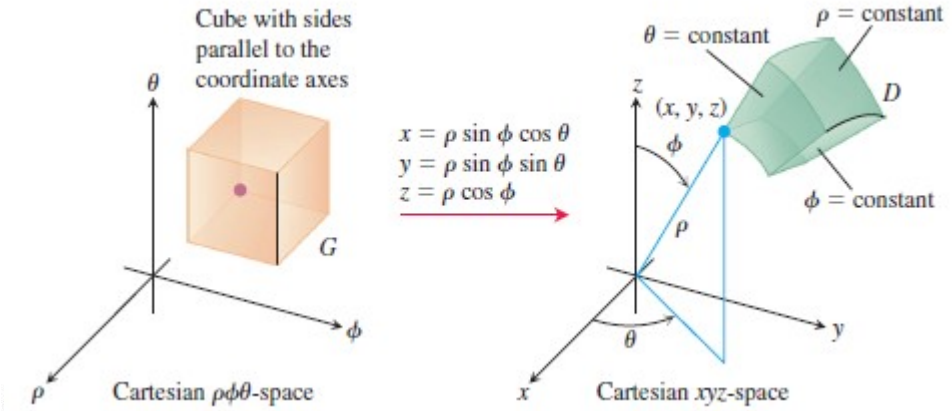
$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(r,\theta,z)\,|r|\,dr\,d\theta\,dz$$

- Küresel koordinatlar için u, v, w yerine ρ, ϕ, θ alınır. Kartezyen $\rho\phi\theta$-uzayından kartezyen xyz-uzayına dönüşüm

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

denklemleri ile verilir. Dönüşümün Jacobiyeni

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi.$$



$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\,|\rho^2 \sin\phi|\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Örnek: $u=(2x-y)/2$, $v=y/2$, $w=z/3$ dönüşümünü uygulayarak

$$\int_0^3\int_0^4\int_{y/2}^{y/2+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$

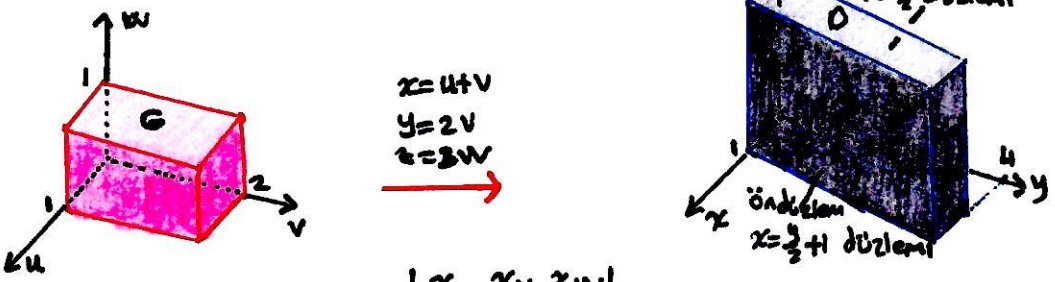
integralini, uvw-uzayında uygun bir bölge üzerinde integre ediniz.

x,y,z'yi u,v,w terimlerinin cinsinden çözersek

$$x=u+v,\qquad y=2v,\qquad z=3w$$

elde ederiz. Şimdi G'nin sınırlarını bulalım:

D'nin sınırı için xyz-denklemleri	G'nin sınırı için uvw-denklemleri	G'nin sade hali
$x=y/2$	$u+v=2v/2=v$	$u=0$
$x=y/2+1$	$u+v=(2v/2)+1=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$
$z=0$	$3w=0$	$w=0$
$z=3$	$3w=3$	$w=1$



Dönüşümün Jacobiyeni $J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6.$

$$\int_0^3\int_0^4\int_{y/2}^{y/2+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u+w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u+w)\,6\,du\,dv\,dw=12.$$